

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ  
13 aprilie 2014

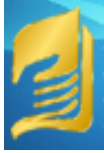


FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**Clasa a IX-a**

- Considerăm mulțimea  $A = \left\{ \frac{1}{2^i \cdot 3^j} / i \in \overline{1;100}, j \in \overline{1;100} \right\}$ .
  - Stabiliți dacă  $\frac{1}{288}$  și  $\frac{1}{2014}$  sunt sau nu elemente ale mulțimii  $A$ ;
  - Arătați că pentru orice  $a \in (0;1)$  și orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+a+a^2+\dots+a^n)(1-a) < 1$ ;
  - Arătați că suma elementelor mulțimii  $A$  este mai mică decât 3.
- Fie  $ABCD$  un paralelogram și  $M$  un punct în planul acestuia. Considerăm  $N$  simetricul lui  $M$  față de  $A$ ,  $P$  simetricul lui  $N$  față de  $B$  și  $Q$  simetricul lui  $P$  față de  $C$ .
  - Arătați că  $\overline{NB} = -\overline{MA} + \overline{AB}$ ,  $\overline{PC} = \overline{MA} - \overline{AB} + \overline{AD}$  și  $\overline{QD} = -\overline{MA} - \overline{AD}$ ;
  - Arătați că  $D$  este mijlocul segmentului  $[QM]$ ;
  - Demonstrați că dacă  $MNPQ$  este paralelogram atunci  $MA \parallel BD$  și  $2MA = BD$ .
- Victor-Viorel are 14 monede de 50 bani, 5 bancnote de 5 lei și 3 bancnote de 10 lei. El vrea să-și cumpere o minge de baschet care costă 50 lei.
  - Dovediți că poate plăti mingea cu banii pe care-i are și fără să primească rest;
  - Determinați în câte moduri poate plăti mingea fără să primească rest.
- O fabrică în care se produc roboți de bucătărie are capacitate maximă de producție de 100 bucăți pe zi. Costul total (exprimat în euro) pentru producerea într-o zi a  $x$  roboți de bucătărie este dat de formula  $c(x) = \frac{1}{10}x^2 + 20x + 25$  iar prețul de vânzare pentru fiecare robot este de  $\left(44 - \frac{1}{5}x\right)$  euro.
  - Aflați costul total pentru producerea într-o zi a 20 de roboți de bucătărie;
  - Determinați câți roboți de bucătărie se pot produce într-o zi cu 2265 de euro;
  - Determinați câți roboți de bucătărie ar trebui produși într-o zi pentru ca profitul total să fie maxim. Aflați valoarea profitului maxim care se poate obține într-o zi.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ  
13 aprilie 2014

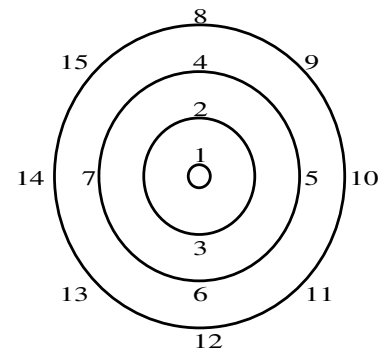


FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

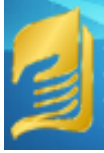
**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

## Clasa a X-a

- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x + x$ .
  - Arătați că  $f$  este strict crescătoare;
  - Rezolvați ecuația  $2^x + x - 6 = 0$ ;
  - Rezolvați inecuația  $2^x(2^x + x - 6) < 2^x + x - 6$ .
- Fie  $z$  un număr complex nereal,  $z \neq \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$  și  $x = \frac{z^2 + z + 2}{z^2 - z + 2}$ .
  - Arătați că  $z^2 - z + 2 \neq 0$ ;
  - Demonstrați că  $x \neq 1$  și  $\frac{x+1}{x-1} = z + \frac{2}{z}$ ;
  - Arătați că  $x$  este număr real dacă și numai dacă  $|z| = \sqrt{2}$ .
- Într-un plan se duc  $n$  drepte distincte astfel încât oricare două nu sunt paralele și oricare trei nu sunt concurente. Se notează cu  $a_n$  numărul de regiuni în care este împărțit planul de cele  $n$  drepte.
  - Determinați  $a_n$  pentru  $n \in \{2; 3; 4\}$ ;
  - Demonstrați că  $a_n - a_{n-1} = n$ , oricare ar fi  $n \geq 3$ ;
  - Arătați că  $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ , oricare ar fi  $n \geq 2$ .
- Se consideră numerele 1, 2, 3, ... așezate ca în figura alăturată pe o schemă de joc de tip "darts", unde vom spune că numărul 1 se află pe cercul  $C_1$ , numerele 2 și 3 se află pe cercul  $C_2$ , numerele 4, 5, 6 și 7 se află pe cercul  $C_3$ , etc.
  - Determinați pe al câtelea cerc se află numărul 2014;
  - Arătați că suma  $S_n$  a numerelor de pe cercul  $C_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , este dată de formula  $S_n = 2^{n-2} \cdot (3 \cdot 2^{n-1} - 1)$ ;
  - Dacă o săgeată nimereste între două cercuri consecutive,  $C_n$  și  $C_{n+1}$ , definim scorul ei,  $s(n)$ , ca fiind diferența dintre suma numerelor de pe cercul mare și de patru ori suma numerelor de pe cercul mic. Să se determine între care cercuri a nimerit o săgeată care a înregistrat scorul 128.



**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ  
13 aprilie 2014

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

## Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului Clasa a XI-a

1. Fie  $n$  un număr natural fixat și funcția  $f_n : [-1;1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^n}$ .

a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$ ;

b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = -\frac{1}{4}$ ;

c) Determinați pentru care valori  $n \in \mathbb{N}$  există limita  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$ .

2. Considerăm matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Arătați că  $A^3 = -8I_2$ ;

b) Dacă  $B \in M_2(\mathbb{R})$  încât  $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B$  și  $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B$ , arătați că există  $a \in \mathbb{R}$  încât  $B = a \cdot I_2$ ;

c) Fie  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât pentru orice matrice  $X \in M_2(\mathbb{R})$  are loc  $A^n \cdot X = X \cdot A^n$ .

Arătați că  $n$  este multiplu de 3.

3. Pentru festivitatea de premiere a unui concurs de matematică s-au cumpărat din trei magazine  $A$ ,  $B$  și  $C$ , cărți, caiete și pixuri. Din magazinul  $A$  s-au cumpărat  $x$  cărți,  $y$  caiete și  $z$  pixuri, plătindu-se 99 lei, din magazinul  $B$  s-au cumpărat  $(x+1)$  cărți,  $(y-2)$  caiete și  $(z+2)$  pixuri, plătindu-se 75 lei iar din magazinul  $C$  s-au cumpărat  $(x-3)$  cărți,  $(y+2)$  caiete și  $(z-4)$  pixuri, plătindu-se 29 lei. Știind că în magazinul  $A$  o carte costă 10 lei, un caiet costă 1 leu iar un pix costă 4 lei, în magazinul  $B$  o carte costă 5 lei, un caiet costă 2 lei iar un pix costă 3 lei, respectiv în magazinul  $C$  o carte costă 4 lei, un caiet costă 1 leu iar un pix costă 2 lei, se cere:

a) Arătați că 
$$\begin{cases} 10x + y + 4z = 99 \\ 5x + 2y + 3z = 68 \\ 4x + y + 2z = 47 \end{cases}$$
;

b) Determinați rangul matricei sistemului;

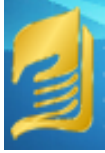
c) Aflați în câte moduri se pot face cumpărăturile.

4. O particulă se deplasează pe o traiectorie după legea de mișcare  $s(t) = 120t - 40 \cdot e^{-\frac{t}{5}}$ , unde  $t$  reprezintă momentul deplasării, măsurat în secunde și  $s(t)$  reprezintă poziția particulei pe traiectorie la momentul  $t$ , măsurată în metri și raportată la o origine  $O$  și un sens ales ca pozitiv la deplasările pe acea traiectorie. Se cere:

a) Aflați distanța față de origine a particulei la momentul  $t = 0$ ;

b) Arătați că există un moment  $t_0$  al deplasării în care particula ajunge în originea  $O$ ;

c) Calculați viteza  $v(0)$  a particulei la momentul  $t = 0$ , unde  $v(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(0)}{t}$ ;



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ  
13 aprilie 2014



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

## Clasa a XII-a

1. Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  și polinomul  $f_n = (n-1)X^n - nX^{n-1} + 1$ .
  - a) Arătați că  $f_n$  se divide cu  $g = (X-1)^2$ ;
  - b) Determinați rădăcinile polinomului  $f_n$  în cazurile  $n=2$  și  $n=3$ ;
  - c) Pentru  $n \geq 4$ , dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$  sunt rădăcinile polinomului  $f_n$ , arătați:

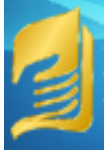
$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 0 \quad (\text{i})$$

și

$$f_n \text{ nu are toate rădăcinile reale.} \quad (\text{ii})$$

2. Fie  $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă și monoton crescătoare.
  - a) Arătați că  $xf(x) + yf(y) \geq xf(y) + yf(x)$ , oricare ar fi  $x, y \in [0;1]$ ;
  - b) Integrând inegalitatea de mai sus în raport cu  $x$ , arătați că:
$$\int_0^1 xf(x) dx + yf(y) \geq \frac{1}{2}f(y) + y \int_0^1 f(x) dx$$
, oricare ar fi  $y \in [0;1]$ ;
  - c) Demonstrați că  $\int_0^1 xf(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$ ;
  - d) Arătați că  $\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx \geq \frac{1}{4}(e-1)$ .

3. În familia Popescu domnește *regula armoniei perfecte*, aceasta în sensul că, în timpul oricărei discuții purtată spre a întreprinde ceva, se știe dinainte cine are ideea cea mai bună. Astfel, fiul, Florin (F), știe că în orice discuție (chiar și cu el însuși!) cea mai bună idee este cea care vine de la interlocutorul său. Părinții, tatăl (T) și mama (M) când discută între ei constată că cea mai bună idee este cea sugerată de Florin iar când discută fiecare cu sine însuși constată că cea mai bună idee este cea sugerată de celălalt părinte.
  - a) Compuneți tabla de operații a mulțimii  $Familia\ Popescu = \{T; M; F\}$ , cu legea de compoziție  $x * y = z \Leftrightarrow$  (din discuția lui  $x$  cu  $y$  cea mai bună idee este cea sugerată de  $z$ );
  - b) Arătați că mulțimea  $Familia\ Popescu = \{T; M; F\}$  cu operația "\*" se structurează ca grup comutativ, izomorf cu grupul  $(\mathbb{Z}_3; +)$  al claselor de resturi modulo 3.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ  
13 aprilie 2014



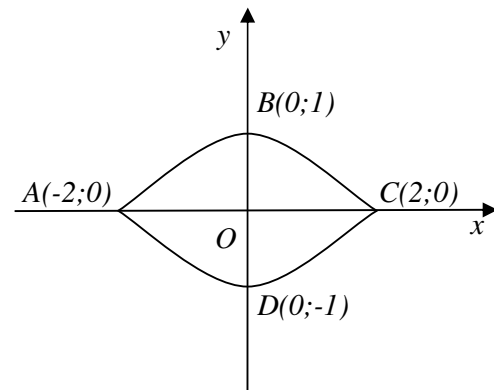
FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

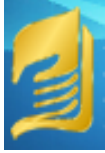
4. O piesă a unui angrenaj este de formă plată lenticulară, cu dimensiunile  $AC = 4\text{ cm}$  și  $BD = 2\text{ cm}$  iar  $\widehat{ABC}$ , respectiv  $\widehat{ADC}$  sunt arce de parabolă de ecuații  $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ , respectiv  $y = \frac{x^2}{4} - 1$ , cu  $x \in [-2; 2]$ , ele fiind reprezentate grafic în figura alăturată. Piesa este realizată în serie, în mod automat, de către o componentă  $A$  a unui utilaj, prin decupare din folii dreptunghiulare de material plastic cu dimensiunile de  $80\text{ cm}$  și  $60\text{ cm}$ , astfel încât fiecare două piese vecine să aibă comun doar unul din punctele de tipul  $A, B, C, D$  din figură și la decupare să se obțină cea mai mică pierdere de material.

Totodată, în momentul în care resturile de material rămase prin decupare cumulează masa unei folii, ele sunt preluate automat de o componentă  $B$  a utilajului, componentă care are rolul de a turna foliile de material plastic necesare decupării și a le transmite componentei  $A$ .

Se cere:

- Determinați numărul de piese decupate din fiecare folie de componenta  $A$  a utilajului.
- Dacă o piesă cântărește  $10$  grame, calculați masa pierderii de material în situația în care utilajul este reglat să se oprească automat după consumarea a  $2014$  folii.





INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

**CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ  
13 aprilie 2014**



**FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL**

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7